14. Изследване на знака на линейния тричлен

Дефиниция 1: *Линеен тричлен* наричаме израза

$$l(x, y) = Ax + By + C,$$

като $|A| + |B| \neq 0$. Да разгледаме правата g с уравнение

$$g : l(x, y) = Ax + By + C = 0,$$

като x, y са афинни координати. Ако $M_i(x_i, y_i)$, $i = 1, 2$, са две точки, то означаваме с

$$l(M_i) = l(x_i, y_i) = Ax_i + By_i + C.$$

Теорема: Точките $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$ са от различни страни на правата g точно когато числата $l(M_1), l(M_2)$ имат различни знаци.
За доказателство на теоремата ще използваме следната лема:
Нека $a, b, c, d \in \mathbb{R}, c < d$ и $f(\lambda) = a\lambda + b$. Тогава уравнението $f(\lambda) = 0$ има решение $\lambda \in (c, d)$ тогава и само тогава, когато $f(c)f(d) < 0$ или $f(\lambda) \equiv 0$.
Доказателство: Имаме $g : l(x, y) = 0$, тогава $M_1 \in g$, тогава и само тогава, когато $l(x_1, y_1) = 0$,а $M_2 \in g$, тогава и само тогава, когато $l(x_2, y_2) = 0$. Следователно ако $M_1, M_2 \notin g$, тогава и само тогава, когато $l(x_1, y_1) \neq 0$ и $l(x_2, y_2) \neq 0$. Следователно $l(x_1, y_1)l(x_2, y_2) \neq 0$.
Тъй като M_1 и M_2 са от различни плуравнини относно g, то отворената отсечка M_1M_2 има уравнение

$$M_1M_2 : \begin{cases} x = (1 - \lambda)x_1 + \lambda x_2 \\ y = (1 - \lambda)y_1 + \lambda y_2 \end{cases} \tag{1}$$

Отворената отсечка M_1M_2 и g се пресичат, тогава и само тогава, когато уравнението $l((1 - \lambda)x_1 + \lambda x_2, (1 - \lambda)y_1 + \lambda y_2)$ има решение при $\lambda \in (0, 1)$:

$$\begin{aligned} &l((1 - \lambda)x_1 + \lambda x_2, (1 - \lambda)y_1 + \lambda y_2) \\ &= A((1 - \lambda)x_1 + \lambda x_2) + B((1 - \lambda)y_1 + \lambda y_2) + C \\ &= (Ax_1 + By_1 + C) + \lambda(-(Ax_1 + By_1) + (Ax_2 + By_2)) \\ &= l(x_1, y_2) + \lambda(l(x_2, y_2) - l(x_1, y_1)) = 0 \end{aligned}$$

Прилагаме лемата за $a = l(x_2, y_2) - l(x_1, y_1)$, $b = l(x_1, y_1)$, $c = 0$, $d = 1$.
Тъй като $b = l(x_1, y_1) \neq 0$, то $f(\lambda) \neq 0$.
Следователно

$$f(\lambda) = l(x_1, y_2) + \lambda(l(x_2, y_2) - l(x_1, y_1)) = 0$$

има решение в $(0, 1)$, тогава и само тогава, когато $f(0)f(1) < 0$, т.е. $l(x_1, y_1)l(x_2, y_2) < 0$.